Hagenův-Poiseuillův zákon/Odvození

Hagenův-Poisseuillův zákon lze odvodit pomocí základních operací integrálního počtu.

Uvažujme vodorovnou válcovitou trubici o konstantním poloměru r a délce L. V této trubici laminárně proudí rychlostí v newtonovská kapalina o viskozitě η. Nechť osa x je ve směru proudu kapaliny, zatímco osa y je na ni kolmá. Newtonův zákon o tečném napětí τ má pak tvar:

$$\tau = -\eta \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}.$$

Tečné napětí τ, vzniklé třením mezi stěnou a proudící kapalinou, se přenáší na další vrstvy kapaliny, a působí tak pokles tlaku mezi začátkem a koncem trubice. Síla tření bude tedy vznikat v místě styku stěny trubice a kapaliny a dá se vyjádřit jako:

$$F_t = \text{obvod} \cdot \text{d lka trubice} \cdot \tau = 2\pi y \cdot L \cdot \tau = -2\pi y \cdot L \cdot \eta \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}.$$

Tato síla bude působit úbytek tlakové síly:

$$F_p = \pi y^2 \Delta P.$$

Z rovnosti těchto sil pak dostáváme:

$$\mathrm{d}v = -\frac{\Delta P}{2L\eta} \cdot y \cdot \mathrm{d}y,$$

a po integraci:

$$v = \int \mathrm{d}v = -\frac{\Delta P}{2L\eta} \int y \cdot \mathrm{d}y = -\frac{\Delta P}{2L\eta} \cdot \frac{y^2}{2} + C,$$

a dosazení za integrační konstantu C dle počátečních podmínek (u stěny je nulová rychlost, tj. $y = r$):

$$v = \frac{\Delta P}{4L\eta} \cdot (r^2 - y^2).$$

Rychlost má tedy parabolický profil.

Pro rychlost platí:

$$v = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}S}$$

tedy pro objemový tok získáme:

$$Q = \int_0^r \mathrm{d}Q = \int_0^r v \cdot \mathrm{d}S = \int_0^r \frac{\Delta P}{4L\eta} \cdot (r^2 - y^2) 2\pi y \cdot \mathrm{d}y = \frac{\Delta P \pi}{2L\eta} \cdot \left(\int_0^r r^2 y \cdot \mathrm{d}y - \int_0^r y^3 \cdot \mathrm{d}y\right) = \frac{\Delta P \pi}{2L\eta} \cdot \left(\frac{r^4}{2} - \frac{r^4}{4}\right)$$

.

Čímž jsme získali výsledný tvar Hagenova-Poiseuillova zákona:

$$Q = \frac{\Delta P \pi r^4}{8L\eta}.$$