Studentův t-test

Studentův t-test je často používaná metoda testování statistických hypotéz. V závislosti na situaci, kdy se používá, se rozlišuje:

- **jednovýběrový t-test**, který slouží k porovnání střední hodnoty μ s konstantou (H_0: $\mu = \mu_0$);
- **dvouvýběrový (nepárový) t-test**, který slouží k porovnání střední hodnoty μ_1 jedné skupiny se střední hodnotou μ_2 jiné skupiny (H_0: $\mu_1 - \mu_2 =$ *konst*);

  např. *střední hodnota systolického tlaku u kuřáků a nekuřáků*;
  nebo *střední hodnota systolického tlaku u skupiny, která bere placebo, a skupiny, která bere β-blokátory*

- **párový t-test**, který slouží k porovnání středních hodnot mezi prvními a druhými prvky uspořádaných dvojic (H_0: $\mu_1 - \mu_2 =$ *konst*).

  např. *střední hodnota systolického tlaku u kuřáků před ukončením kouření a po ukončení kouření*;
  nebo *střední hodnota hladiny oxytocinu v krvi u matek a u jejich dětí*

Jednovýběrový Studentův t-test

> Jednovýběrový t-test je praxi méně často používaný než dvouvýběrový a párový, ale didaktičtější.

Data

Máme data $x_1, \ldots, x_n \sim N(\mu, \sigma^2)$. Z nich získáme výběrový průměr $\overline{x}$ a výběrovou směrodatnou odchylku s.

Hypotézy

- H_0: $\mu = \mu_0$ (konstanta)
- H_A: $\mu \neq \mu_0$ (oboustranná alternativa; jednostranné: $\mu < \mu_0$, $\mu > \mu_0$)

Nulové rozdělení

t_{n-1} (Studentovo s n−1 stupni volnosti)

Testová statistika

$$T = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\mathrm{SEM}} = \frac{\overline{x} - \mu_0}{s} \cdot \sqrt{n}$$

Kritická hodnota testu pro hladinu α

$t_{n-1,\, 1-\alpha/2}$[† 1]

Výpočetní technika

- Program *STATISTICA*: *Statistiky* → *Základní statistiky* → *t-test, samostatný vzorek*
- Program *EXCEL*:
  1. Je nutné použít párový t-test, jako data do páru je nutné vytvořit sloupec s testovanou konstantou
  2. *Nástroje* → *Doplňky* → *Analýza dat* (zaškrtnout)
  3. *Nástroje* → *Analýza dat* → *Dvouvýběrový párový studentův test na střední hodnotu*

  ⚠ **V české verzi je nutné dát pozor na parametr *stupně volnosti*, který je špatně přeložen jako *rozdíl*.**

Dvouvýběrový Studentův t-test

Data

$x_1, \ldots, x_n \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, směrodatná odchylka s_1

$y_1, \ldots, y_m \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, směrodatná dochylka s_2

Nulová hypotéza

H_0: $\mu_1 = \mu_2$ (obecněji H_0: $\mu_1 - \mu_2 =$ konstanta)

Alternativní hypotéza

- H_A: $\mu_1 \neq \mu_2$ (oboustranná alternativa)
- H_A: $\mu_1 > \mu_2$; $\mu_1 < \mu_2$ (jednostranná alternativa)

> Používání jednostranné alternativy se obecně nedoporučuje.

Testová statistika

$$T = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{\mathrm{SE}(\overline{x} - \overline{y})}$$

$\mathrm{SE}(\overline{x} - \overline{y})$ se dá chápat jako:

1. Předpokládáme $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$, „t-test pro shodné rozptyly“ (klasická varianta)
2. Uvažujeme i možnost $\sigma_1 \neq \sigma_2$, „t-test pro neshodné rozptyly“ (tzv. Welchův test, Satterthwaiteův test)

K rozlišení vhodnosti daných variant lze použít např. F-test shody rozptylů.

⚠ **Použití na testování na shodu rozptylů není ovšem univerzální.** Testy na rozptyl mohou vyjít falešně signifikantní pouze díky velkému počtu dat, či falešně nesignifikatní kvůli malému množství dat.

T-test pro shodné rozptyly

Označován jako *pooled variance t-test*. Předpokládáme:

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2,$$

Společný rozptyl se odhaduje jako

$$s^2 = \frac{1}{n+m-2}[\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 + \sum_{i=1}^{m}(y_i - \overline{y})^2] = [(n-1)s_1^2 + (m-1)s_2^2]/(n+m-2)$$

$$\mathrm{SE}(\overline{x} - \overline{y}) = s \cdot \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}$$

Nulové rozdělení

Při H_0 platí:

$$T \sim t_{n+m-2}$$

T-test pro neshodné rozptyly

Občas označován jako Welchův test, Satterthwaitův test či *separed variance t-test*. Předpokládáme:

$$\sigma_1 \neq \sigma_2,$$

$$\mathrm{SE}(\overline{x} - \overline{y}) = \sqrt{\frac{s_1^2}{n} + \frac{s_2^2}{m}}.$$

Nulové rozdělení

Při H_0 má T **přibližně** rozdělení $t_{\mathrm{D}f}$. Počet stupňů volnosti odpovídá n, m, s_1, s_2. Nemusí to být celé číslo. $\mathrm{Df} \leq n + m - 2$

Párový Studentův t-test

Data

$x_1, \ldots, x_n \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, průměr $\overline{x}$

$y_1, \ldots, y_n \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, průměr $\overline{y}$

Párové diference

$$z_1 = x_1 - y_1, \ldots, z_n = x_n - y_n \sim N(\mu_1 - \mu_2, \sigma^2)$$

$$\overline{z} = \overline{x} - \overline{y}$$

s_z je SD párových diferencí.

Nulová hypotéza

H_0: $\mu_1 = \mu_2$ (obecněji H_0: $\mu_1 - \mu_2$ = konstanta)

Alternativní hypotéza

- H_A: $\mu_1 \neq \mu_2$ (oboustranná alternativa)
- H_A: $\mu_1 > \mu_2$; $\mu_1 < \mu_2$ (jednostranná alternativa)

> Používání jednostranné alternativy se obecně nedoporučuje.

Testová statistika

$$T = \frac{\bar{z}}{s_z/\sqrt{n}} = \frac{\bar{x}-\bar{y}}{s_z/\sqrt{n}} = \frac{\bar{z}}{\mathrm{SE}(\bar{x}-\bar{y})}$$

$\bar{x}$, $\bar{y}$ jsou realizace náhodné veličiny, $\bar{x}-\bar{y}$ je tedy také realizace náhodné veličiny, $\mathrm{SE}(\bar{x}-\bar{y})$ je její směrodatná odchylka

(Obecněji $T = \dfrac{\bar{z}-\mathrm{konst}}{s_z/\sqrt{n}}$)

Nulové rozdělení

Při platnosti H_0: $T \sim\ t_{n-1}$

Pravděpodobnost, že T přesáhne hodnotu T_0 nebo bude nižší než $-T_0$ je

$$P(-T_0 < T < T_0) = 2 \cdot (1 - F(T_0))$$

Kritická hodnota

$t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}$

Výpočetní technika

- Program *STATISTICA*: *Statistiky* → *Základní statistiky* → *t-test, závislé vzorky*
- Program *EXCEL*:
  1. *Nástroje* → *Doplňky* → *Analýza dat* (zaškrtnout)
  2. *Nástroje* → *Analýza dat* → *Dvouvýběrový párový studentův test na střední hodnotu*

  ⚠ **V české verzi je nutné dát pozor na parametr *stupně volnosti*, který je špatně přeložen jako *rozdíl*.**

Výpočetní technika

- Program *SAS*: *Tasks* → *ANOVA* → *t Test...*
- Program *STATISTICA*: *Statistiky* → *Základní statistiky* → Vhodný typ testu
- Program *Excel*: funkce *TTEST()*
- Program *Excel*, alternativní způsob:
  1. V Excelu, který nemá data ve formě objekty × veličiny, je nutné data vhodně uspořádat
  2. *Nástroje* → *Doplňky* → *Analýza dat* (zaškrtnout)
  3. *Nástroje* → *Analýza dat* → Vhodný typ testu

  ⚠ **V české verzi je nutné dát pozor na parametr *stupně volnosti*, který je špatně přeložen jako *rozdíl*.**

Poznámky

1. (1−α/2)-kvantil rozdělení t_{n-1}

Odkazy

Související články

- Testování statistických hypotéz
- ANOVA

Použitá literatura

- KLASCHKA, Jan. *Testování statistických hypotéz* [přednáška k předmětu Zdravotnická statistika 1,2, obor Všeobecné lékařství, 1. lékařská fakulta Univerzita Karlova]. Praha. 26.4.2011.
- KLASCHKA, Jan. *Studentův t-test* [přednáška k předmětu Zdravotnická statistika 1,2, obor Všeobecné lékařství, 1. LF Univerzita Karlova]. Praha. 3.5.2011.
- KLASCHKA, Jan. *Studentův t-test* [přednáška k předmětu Zdravotnická statistika 1,2, obor Všeobecné lékařství, 1. LF Univerzita Karlova]. Praha. 10.5.2011.