Biosignály z pohledu biofyziky/frekvenční spektrum signálu

Frekvenční spektrum signálu

Kromě časového průběhu signálu je vysoce důležitou charakteristikou jeho frekvenční spektrum, tj. obsah kmitočtů, které jsou v něm obsaženy. Z toho důvodu nám nezbude, než si hned na začátku objasnit základní **princip konverze mezi časovou a kmitočtovou doménou**, tj. **Fourierovy transformace**.

Vidíme, že průběhy signálu (18) resp. (19) obsahují jedinou frekvenci

f [Hz] = ω [rad/s] / 2 π [rad](20)

což přímo plyne z (13).

Skládání (superpozice) harmonických signálů

Zkusíme, jaký signál vznikne např. složením dvou harmonických signálů:

x(t) = u(t) + v(t)(21a)

kde

u(t) = a. cos(α) = a. cos (ω. t)(21b)

v(t) = b. sin(α) = b. sin (ω. t)(22c)

Signály u(t) a v(t) si můžeme představit jako průměty dvou vzájemně kolmých vektorů o délkách *a* a *b*, rotujících společnou úhlovou rychlostí ω. Jejich **vektorový součet** bude mít délku, danou Pythagorovou větou

√(a2 + b2)(22a)

a fázi φ, danou poměrem

tg (φ) = a / b(22b)

a bude rotovat tou samou úhlovou rychlostí . Důležitý výsledek, ke kterému bychom došli zobecněním tohoto příkladu, zní, že **součtem libovolného množství harmonických signálů** s libovolnými amplitudami a fázemi, avšak **stejnými frekvencemi**, je opět **harmonický signál o téže frekvenci**, jehož amplituda a fáze je dána vektorovým součtem rotujících vektorů jednotlivých harmonických signálů.

Dalším zajímavým pokusem je složení dvou harmonických signálů o **různých frekvencích**, z nichž druhá frekvence je **celistvým násobkem** první, **základní frekvence**. Amplitudy i fáze obou signálů jsou opět libovolné. Zvolme jako příklad:

x(t) = x1(t) + x2(t)(23a)

kde x1(t) = a1. sin(α + φ1) = a1. sin(ω. t + φ1)(23b)

x2(t) = a2. sin(2α + φ2) = a2. sin(2ω. t + φ2)(23c)

Výsledkem bude signál opět s periodou podle (17), ale jeho **průběh se bude lišit od** sinusového, **harmonického**. Laborováním s různými velikostmi amplitud a fází můžeme docílit různých průběhů signálu.

Použitím většího počtu harmonických signálů o frekvencích jedno-, dvoj-, tří-, čtyř- atd. až n-násobku základní frekvence a jejich vhodným skládáním se můžeme velmi přesně blížit prakticky libovolně zvolenému periodickému průběhu signálu, a právě tento postup je základem harmonické neboli **Fourierovy syntézy** neboli Fourierova rozvoje.

Trigonometrickou Fourierovou řadou nazýváme součet

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)\right] \quad (24)$$

Lze dokázat, že pomocí takovéhoto součtu můžeme vyjádřit prakticky jakoukoliv funkci, např. obdélníkovou, trojúhelníkovou a jakoukoli jinou.

Otázkou zcela na místě položenou je, jakým způsobem je najít příslušné váhové koeficienty a_k a b_k tak, abychom pomocí řady (23) mohli složit potřebnou funkci.

Fourierova (harmonická) analýza

Odpovědí na položenou otázkou je opačný postup, než je Fourierova syntéza, a tou je Fourierova analýza, čili postup, kterým je možno naopak libovolný průběh signálu **rozložit** na výše uvedený součet (24). Příslušné koeficienty najdeme integrováním součinu dané funkce x(t) s příslušnou goniometrickou funkcí na intervalu periody signálu:

$$a_k = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} x(t).\cos(k\omega t)\mathrm{dt} \quad (25a)$$

$$b_k = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} x(t).\sin(k\omega t)\mathrm{dt} \quad (25b)$$

Další příklady elementárních průběhů:

- obdélníkový signál
- jednotkový impuls (Diracova distribuce)
- jednotkový skok (Heavisideova funkce)
- trojúhelníkový signál

Výkonové spektrum signálu (power spectrum)

Další důležitou charakteristikou signálu je jeho výkonové spektrum, které nám odpovídá na otázku, v jaké míře je zastoupen výkon jeho jednotlivých složek ve frekvenčním spektru.

Elektrický výkon počítáme jako **součin proudu a napětí**. **Okamžitý výkon signálu** v každém časovém okamžiku t proto můžeme spočítat jako **součin okamžitého napětí a proudu** (okamžité hodnoty výkonu, proudu a napětí někdy někdy na rozdíl od středních hodnot označujeme malými písmeny):

p(t) = u(t). i (t)(26)

Uvedený vztah je pravdivý, avšak nepříliš šikovný, protože pro výpočet jedné časově proměnné veličiny potřebujeme počítat (a v praxi tím pádem také měřit) součin dvou signálů – jeden tvořený proudem a druhý napětím. Obvykle však u(t) a i(t) nejsou vzájemně nezávislé veličiny, ale jedná se o signál, který se spotřebovává na nějakém odporu neboli **zátěži**, představované **reálnou impedancí**, kterou považujeme v daných mezích **konstantu**. **Ohmův zákon** má tak universální platnost, že jej můžeme použít i pro **proměnné veličiny**:

u(t) = R. i(t)(27)

i(t) = u(t) / R(28)

Použitím Ohmova zákona ve vztahu pro vyjádření okamžitého výkonu dostáváme vyjádření pro **okamžitý výkon**:

p(t) = u^2(t) / R = i^2(t). R(29)

Uvedené vztahy umíme používat pro stejnosměrný a střídavý proud, zde se projevuje jejich obzvláštní důležitost v případě výpočtu okamžitého výkonu signálu libovolného průběhu. **Za předpokladu konstantní zátěže** je tedy spotřebovávaný **výkon úměrný druhé mocnině napětí anebo proudu**. S touto **kvadratickou závislostí** výkonu na napětí nebo proudu uvažujeme i v případech, ve kterých se explicitně o spotřebovávání výkonu na zátěži nehovoří.

Analogické vztahy můžeme odvodit i v případě **akustického signálu**, kdy namísto elektrického napětí a proudu uvažujeme **okamžitou rychlost** kmitajících částic prostředí [m/s] a **okamžitý tlak** [N/m^2]. Jejich součin představuje **intenzitu zvuku** [W/m^2], má proto charakter **výkonu**. V akustice rovněž uvažujeme **akustickou impedanci** jako jednu z důležitých charakteristik prostředí, kterou – opět v daných mezích – většinou můžeme **považovat za konstantu**. Proto nepřekvapí, že i v případě akustického signálu docházíme ke zjištění, že **okamžitý výkon je úměrný druhé mocnině akustického tlaku** či **akustické rychlosti** (nepleteme s rychlostí šíření zvuku, zde se jedná o okamžitou rychlost kmitajících částic prostředí).

K podobným výsledkům bychom dospěli i při vyšetřování průběhu jiných fyzikálních veličin, které mohou nést nějaký signál. Docházíme tak k poznatku kardinálního významu, že totiž nezávisle na konkrétní fyzikální reprezentaci je **okamžitý výkon signálu úměrný druhé mocnině jeho okamžité výchylky**. V případě **periodických signálů** pak můžeme odvodit, že jejich **výkon je úměrný druhé mocnině amplitudy signálu**.

Tak jsem dospěli ke způsobu, jakým můžeme **vypočítat výkonové spektrum libovolného signálu**: harmonickou analýzou tak, že namísto průběhu signálu **počítáme s průběhem jeho druhé mocniny**.

Fourierova transformace má tu důležitou matematickou vlastnost, že jednotlivé frekvenční složky jsou vzájemně tzv. **ortogonální** neboli nezávislé. To má pro praxi enormně důležitý důsledek, že totiž i výkony jednotlivých složek jsou na sobě vzájemně nezávislé a **celkový výkon signálu můžeme spočítat jako součet výkonů všech jeho frekvenčních složek**. A dále: pokud už jsme jednou spočítali pro daný průběh signálu jeho frekvenční spektrum, není nutné za účelem zjištění výkonového spektra provádět Fourierovu transformaci ještě jednou na druhé mocnině jeho průběhu, jak jsme uváděli výše, ale stačí vypočítat druhé mocniny amplitud jednotlivých složek jeho frekvenčního spektra.

Odkazy

Zdroj

- HEŘMAN, Petr. *Biosignály z pohledu biofyziky.* 1. vydání. Praha : Petr Heřman – DÚLOS, 2006. 64 s.

Doporučená literatura

- AMLER, Evžen, et al. *Praktické úlohy z biofyziky I.* 1. vydání. Praha : Praha: Ústav biofyziky 2. lékařské fakulty UK, 2006.
- HRAZDIRA, Ivo. *Biofyzika : učebnice pro lékařské fakulty.* 2. vydání. Praha : Avicenum, 1990. ISBN 80-201-0046-6.
- KHAN, M. I. Gabriel. *EKG a jeho hodnocení.* 1. vydání. Praha : Grada, 2005. ISBN 80-247-0910-4.
- KOMÁREK, Vladimír, et al. *Dětská neurologie.* 1. vydání. Praha : Galén, 2008. ISBN 80-7262-492-8.
- ROSINA, Jozef, et al. *Lékařská biofyzika.* 1. vydání. Praha : Manus, 2000. 0 s. ISBN 80-902318-5-3.
- NAVRÁTIL, Leoš a Jozef ROSINA. *Biofyzika v medicíně.* 1. vydání. Praha : Manus, 2003. 398 s. ISBN 8086571033.
- NAVRÁTIL, Leoš a Jozef ROSINA, et al. *Medicínská biofyzika.* 1. vydání. Praha : Grada, 2005. ISBN 80-247-1152-2.