# Frekvenční a výkonové spektrum

Signál je plně popsán svým časovým průběhem. V teorii signálů se hovoří o reprezentaci signálu v **časové doméně** (i když význam "času" může mít např. vzdálenost). V řadě úloh je však mnohem výhodnější signál reprezentovat v **doméně frekvenční**. Podstatou reprezentace signálu ve frekvenční doméně je vyjádření signálu chápaného jako funkce času jako součet řady vhodně vybraných periodických funkcí. V praxi se nejvíce odvědčilo použití goniometrických funkcí, tedy funkcí sinus a kosinus.

## Fourierova transformace

Předpokládejme, že *x(t)* je signál spojitý se základní frekvencí *f*. Pro další úvahy je vhodné použít kruhovou frekvenci $\omega=2\pi f$ (viz analogie s otáčivým pohybem). Takový signál pak lze rozložit na součet fázově posunutých sinusovek o frekvencích *f*, *2f*, *3f*, atd. Zapsáno matematicky, signál *x(t)* a se základní frekvencí $\omega$ lze napsat následujícím způsobem:

$$x(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \sin(n\omega t + \varphi_n)$$

Poznamenejme, že rovnost neplatí obecně. Suma na pravé straně rovnice se označuje jako **Fourierova řada**. Matematický postup, kterým se naleznou koeficienty $A_n$ a $\varphi_n$, se nazývá **Fourierova transformace**. Tvar jen se siny není příliš pohodlný pro další výpočty, naštěstí lze použít známý součtový vzorec:

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

Tím pádem lze Fourierovu řadu psát i následujícím způsobem:

$$x(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

Kde za koeficienty Fourierovy řady (tedy za výsledek Fourierovy transformace) je pokládána řada dvojic $(a_n,b_n)$. Z nepříliš složité matematické teorie v pozadí Fourierovy transformace plyne, že je výhodné někdy Fourierovu řadu zapisovat jako řadu komplexních čísel $z_n$, pro která platí následující vztah:

$$z_n = a_n + jb_n = A_n e^{-j\varphi_n}$$

Poznamenejme, že komplexní jednotka může být značena *i* i *j*, první značení používají matematici a fyzici, druhé technici.

### Význam při studiu lineárních systémů

Rozklad signálu na harmonické složky má velký význam u lineárních systémů. Lineární systémy se totiž vyznačují tím, že odezva na součet dvou signálů je vlastně součtem odezvy na jednotlivé tyto signály. Odezva na harmonický signál se přitom vyšetřuje po matematické stránce poměrně snadno.

Zajímá-li nás tedy odezva lineárního systému na libovolný signál, stačí vyšetřit odezvu postupně po jednotlivých složkách Fourierovy řady a výsledek sečíst. Jedním z důsledků je to, že ve výstupu *y(t)* lineárního systému, který je buzen nějakým signálem *x(t)*, se nemohou objevit jiné frekvence, než jaké jsou obsaženy v signálu *x(t)*.

## Frekvenční spektrum

Frekvenční spektrum signálu není nic jiného, než řada prvků $z_n$ popsaných výše. Protože jde o komplexní čísla, není znázornění posloupnosti v rovině snadné. Obvykle se používá amplitudové a fázové spektrum. Informaci o signálu nesou obě spektra společně, jedno bez druhého neobsahuje plnou infromaci.

### Amplitudové spektrum

Amplitudové spektrum je posloupností amplitud $A_n$, pro které platí následující vztah s koeficienty $a_n$ a $b_n$:

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

### Fázové spektrum

Fázové spektrum je posloupností amplitud $\varphi_n$, pro které platí následující vztah s koeficienty $a_n$ a $b_n$:

$$\varphi_n = \operatorname{arctg} \frac{b_n}{a_n}$$

## Výkonové spektrum signálu

Výkonové spekturm (*Power Spectrum* v anglicky psané literatuře a v některých oblastech již zdomácnělý anglicismus) vychází z historických elektrotechnických kořenů analýzy signálů. Je vlastně odpovědí na otázku, jaký (tepelný) výkon by měla daná frekvenční složka signálu chápaného jako elektrické napětí *u(t)* na jednotkovém rezistoru. Odpověď je velmi snadná, pro okamžitý výkon signálu platí:

$$p(t) = \frac{u^2}{R}$$

Protože předpokladem je *R=1*, lze tento symbol vypustit. Pro výkon nesený n-tou složkou tedy bude platit:

$$p_n(t) = u_n^2(t)$$

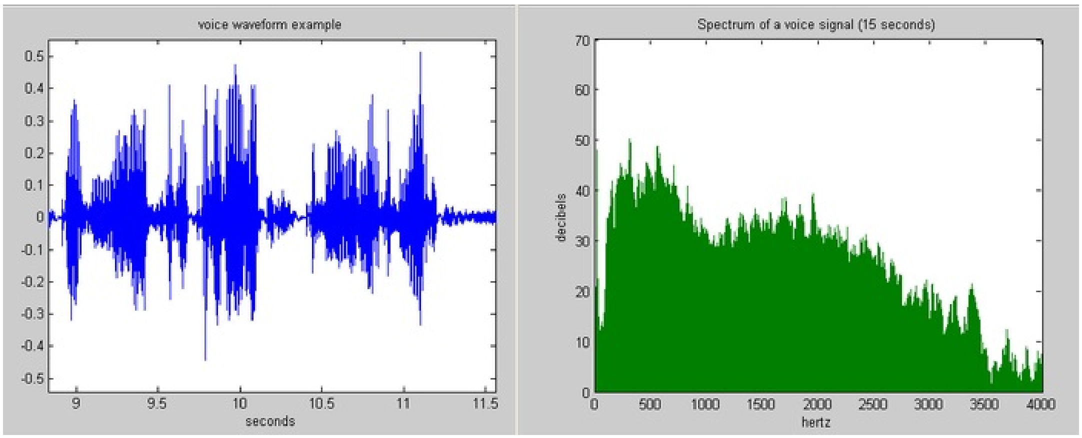
Hodnota $u_n(t)$ je ale již harmonická, protože platí:

$$u_n(t) = A_n \sin(n\omega t + \varphi_n))$$

lze snadno ukázat, že (střední) výkon nesený n-tou složkou bude mít tvar:

$$P_n = A_n^2$$

Od prostého amplitudového spektra se liší matematicky tím, že je vlastně druhou mocninou amplitudového spektra. Fakticky jde o významný rozdíl, výkonové spektrum informuje o energetických poměrech. Příklad biosignálu v časové a frekvenční doméně je na následujícím obrázku. V levé polovině je časový průběh vzorku lidského hlasu v časové doméně, v pravé polovině je tentýž vzorek ve frekvenční doméně:




# Odkazy

## Použitá literatura


- HEŘMAN, Petr. *Biosignály z pohledu biofyziky.* 1. vydání. Praha : Dúlos, 2006. 63 s. ISBN 80-902899-7-5.
- Wikipedie. *Fourierova transformace* [online]. [cit. 2014-1-6]. <https://cs.wikipedia.org/wiki/Fourierova_transformace>.
- Wikipedie. *Frekvenční spektrum* [online]. [cit. 2014-1-6]. <https://cs.wikipedia.org/wiki/Frekven%C4%8Dn%C3%AD_spektrum>.